Анализ сходимости ряда Флинта-Хиллза

А.И. Прошунин [1], email:alexfrauch@gmail.com
А.В. Толкачев [1,2], email: tolkachev.akim@mail.ru

[1] Воронежский государственный университет
[2] Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова

Аннотация. *В данной работе проводиться анализ сходимости ряда Флинта-Хиллза. Разработан метод численной проверки сходимости ряда до чисел* 10^{2500}*. Получена численная оценка динамики сходимости данного ряда.*

Ключевые слова: *численные методы, ряд Флинта-Хиллза.*

Введение

В списке открытых математических проблем есть на первый взгляд простая и интересная задача. Ряд вида (1) называется рядом Флинта-Хиллза.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n} \qquad (1)$$

Неизвестно, сходится ли этот ряд, так как $1/\sin^2 n$ может иметь большие значения. Существующее оценки показывают его поведение до $n = 10^4$ приводят к значению 30.3145. Положительные целые значения, дающие возрастающие наибольшие значения, $1/\sin^2 n$ равны 1, 3, 22, 333, 355, 103993, ... , которые точно являются числителями рационального приближения π .

Алексеев [1] показал, что вопрос о сходимости ряда Флинт-Хилла связан с мерой иррациональности, и π, в частности, сходимость будет означать $\mu \pi \leq 2.5$, что намного сильнее, чем лучшая известная в настоящее время верхняя граница. В [2] показано, что мера иррациональности более 7, что также недостаточно об утверждении сходимости.

Алгоритм проверки

Для того чтобы проверить сходимость численно, в первую очередь необходимо было определить какие значения наибольшим образом оказывают влияние в расхождении ряда. Как ранее было указано на числители рационального приближения числа π могут иметь большие значения элементов ряда. Хорошо известно, что синус достаточно равномерно на бесконечной прямой заполняет значение от нуля до единицы. Поэтому для проверки гипотезы в первую очередь необходимо было исследовать сходимость ряда, который состоит из числителей рационального приближения. В некотором смысле можно сказать, что это подряд, который состоит из элементов с наименьшей скоростью сходимости. Используя правило построения цепных дробей и используя данные численной оценки числа π с большим количеством знаков после запятой можно построить ряд из числителей рационального приближения.

$$a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

Также используя данные о том, что $\sin x \geq c \cdot x$ (при малых) для численной оценки элементов данного ряда синус был заменён на аргумент. Далее для работы с большими числами, которые не помещаются в стандартную систему хранения чисел использовались специальные инструменты. В работе использовалось число π с 54605 числами после запятой.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^3 \sin^2 p_k}$, где $\frac{p_k}{q_k} \to \pi, k \to \infty$. Используя следующее свойство, что $\sin^2 (p_k) = \sin^2 (p_k - \pi q_k) \approx (p_k - \pi q_k)^2$, получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^3 (p_k - \pi q_k)^2}$$

Результаты

Произведя численный эксперимент, были получены следующие результаты сумма данного подряда для первых 5000 элементов ряда составила 27.644611398994503. Динамика суммы ряды представлена на рис 1. На данном промежутке видно, что ряд достаточно быстро сходиться к некоторому значению. Скорость убывания элементов представлена на рис.2. Видно, что ряд хорошо ложиться на линию геометрической последовательности. На рис 2 представлена величина ряда в зависимости от k. С учетом этих значений сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3} \sin^{2} n} \approx 30.3021116102965485$$

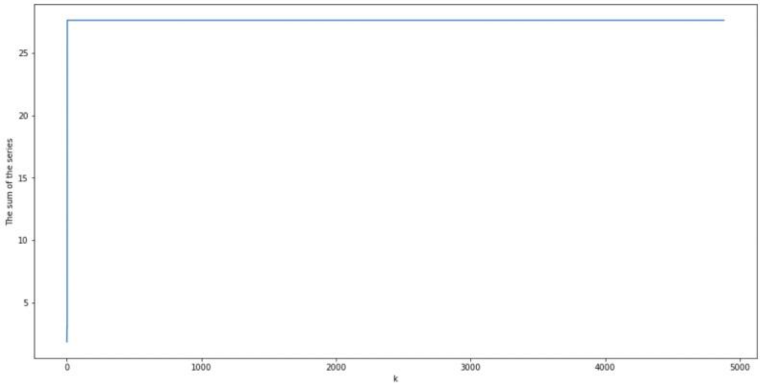

Рис. 1. Величина суммы ряда в зависимости от k

В дальнейшем для изучения сходимости данного ряда требуется продолжение исследований в области меры иррациональности числа π.

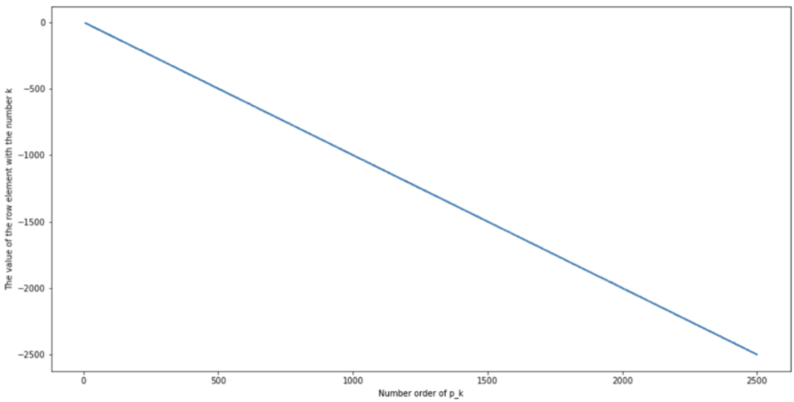

Рис. 2. Величина элементов в зависимости от порядка числа

Список литературы

1. Alekseyev, M. A. (2011). On convergence of the Flint Hills series. arXiv preprint arXiv:1104.5100.

2. Zeilberger D., Zudilin W. The irrationality measure of π is at most 7.103205334137… //Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. – 2020. – Т. 9. – №. 4. – С. 407-419.

3. Carella N. A. Irrationality Measure of Pi //arXiv preprint arXiv:1902.08817. – 2019.

4. Habala P. Sequences and series: a tool for approximation //Calculus for Engineering Students. – Academic Press, 2020. – С. 61-83.

5. Chakhkiev M. A. et al. On the convergence of some special series //International Journal of Mathematical Analysis. – 2016. – Т. 10. – №. 12. – С. 573-577.